数理解析研究所講究録
28巻 1967年 15-48

確率的系における最適制御過程について

九州大学理学部　　南　　正義

§1. 序

最適制御問題の解析は元来、極大値や極小値を求める問題として発足し、制御域Uが開集合の場合に、古くから変分法が用いられて来たが、この古典的な変分問題を制御域Uが任意の集合(特に有界閉集合)でもよい場合に拡張したのが、一つはR. Bellman[1]のダイナミック・プログラミング(略称D·P)と呼ばれる解析法であり、他方はL.S. Pontryagin[2]の最大原理による解析法である。最近、各種の制御系における最適制御問題を解析するのに多くの人々によってポントリャーギンの最大原理の類似がなされて来ている。たとえば、L.I. Rozonoér[3]は常微分方程式系によって記述される最適制御過程について最大原理が成立つことを[2]よりはむしろ少し強い仮定の下に[2]の幾何学的な方法とは異なる解析学的な方法で導き、更に最大原理とD·P法との間に密接な関係があることを*Hamilton-Jacobi*の偏微分方程式を導いて説明した。また、A.G. Butkovskii [4], [5], および、A.I. Egorov

[6]はそれぞれ積分方程式系，および双曲型偏微分方程式系によって記述される最適制御過程（但し、時間区間は固定されているものとする）について最大原理を導いているが，Ju.V.Egorov[7]はあらゆる瞬間において制御過程の状態がBanach空間内の点として考えられるような

$$\frac{dx(t)}{dt}=f(x(t),\ u(t)),\quad x(t_0)=x_0,\quad u(t)=u\in U \qquad (1)$$

（ここに，制御域Uは任意の位相空間内の部分集合とする）なる形式によって記述される最適制御過程についてある制限の下で最大原理が成立つことを[2]の類似によって厳密に示し、更に双曲型偏微分方程式系で記述される制御過程の最短時間問題に対して最適制御の存在性と一意性を導いている。

一方、確率的な制御系、特に任意の確率過程に従う外乱，あるいは衝撃をもつ確率的差分方程式系

$$x_{j+1}=f(x_j,\ u_j,\ \xi_j),\quad 0\leqq j\leqq N-1 \qquad (2)$$

ここに、x_j = 時刻 $t=j$ のときの n 次元の状態ベクトル

u_j = 時刻 $t=j$ のときの r 次元の制御ベクトル

ξ_j = 時刻 $t=j$ のときの k 次元の外乱ベクトル

に対して最終時刻 $t=N$ のときの状態ベクトルの零座標の期待値 $E\{x_N(0)\}$ を最小にする最適制御問題については、H.J.Kushner & F.C.Schweppe[8]，および D.D.Sworder[9] によっ

て、大局的な最小条件でない「くずれた形式」での最大原理が成立つこと、また、特に系が線型でかつ最適制御が状態変数に関して線型な函数である場合には通常の意味での最大原理が成立つことが導かれている。

ここでは、時間連続型の確率的制御系、特に任意の確率過程に従う外乱をもつ確率微分方程式系によって記述される最適制御過程について*Rozonoer*の解析法の類似によって確率的な最大原理が導かれることを示し、更に最大原理と*Bellman*のD.P.法との間にやはり密接な関係があることをH.J. Kushnerの論文[10]をもとにして考察する。[10]では制御過程の構造自体に数学的厳密さが欠けている箇所がところどころ見受けられたため、筆者はこれらの部分を訂正しながら議論し、今後の問題点を提供することにした。

§2. 確率微分方程式系における最適制御問題の定式化

次のような確率微分方程式系によって記号的に記述される制御過程を考えることにする。

$$dx(\omega,t) = f(x(\omega,t),\,u(\omega,t))dt + dZ(\omega,t) \tag{3}$$

ここに、$x(\omega,t) = \begin{pmatrix} x^1(\omega,t) \\ \vdots \\ x^n(\omega,t) \end{pmatrix}$，$f(x,u) = \begin{pmatrix} f^1(x,u) \\ \vdots \\ f^n(x,u) \end{pmatrix}$，$Z(\omega,t) = \begin{pmatrix} Z^1(\omega,t) \\ \vdots \\ Z^n(\omega,t) \end{pmatrix}$

はともにn次元のベクトル函数とし、また、

$u(\omega,t)=\begin{pmatrix}u^1(\omega,t)\\ \vdots \\ u^r(\omega,t)\end{pmatrix}$ は制御(control)と呼ばれる r 次元のベクトル函数とする。

$z(\omega,t)$ は直積空間 $\Omega\times[0,T]$ から n 次元ユークリッド空間 E^n の中への写像とし、可測空間 $(\Omega\times[0,T],\tilde{\Sigma},m(d\omega\times dt))$ において定義された確率過程とする。

ここに、Ω : 標本空間,

ω : Ω の標本点,

$[0,T]$: 固定された一次元の閉区間,

$\tilde{\Sigma}$: $z(\cdot,\cdot)$ が可測となる直積空間 $\Omega\times[0,T]$ 上の最小の σ-field,

$m(d\omega\times dt)$: $\tilde{\Sigma}$ 上の直積測度,

$\Sigma(t)$: $z(\cdot,\tau)$, $0\leqq\tau\leqq t$ が可測となる Ω 上の最小の σ-field とする; $\Sigma(t)$ は t に関して単調増大である; i.e. $s\leqq t \Rightarrow \Sigma(s)\subset\Sigma(t)$,

$\mu(d\omega)$: Ω 上の σ-field $\Sigma(T)$ についての確率測度,

$\mathcal{L}^n$: n 次元ユークリッド空間 E^n 上の最小の σ-field,

dt : 閉区間 $[0,T]$ 上の Borel field $\mathcal{L}^1[0,T]$ についての Lebesgue 測度とする。

したがって、$\tilde{\Sigma}=\Sigma(T)\otimes\mathcal{L}^1[0,T]$, $m(d\omega\times dt)=\mu(d\omega)\otimes dt$

と書き表わしても差し支えない。

注意1. 以下において次の記号を約束しておく。$E[H|\Sigma]$ は Σ を与えたときの H の条件付期待値を表わす記号とする。また、記号を簡略化するためにときどき確率径数 ω を省略する。たとえば、$x(\omega,0)$, および $x(\omega,t)$ はそれぞれ $x(\cdot)$, および $x(t)$ として書き表わすことにする。プライム($'$)は転置行列を表わすものとする。たとえば、

$$F' \equiv \begin{array}{c} \xrightarrow{i\text{列}} \\ \downarrow j\text{行} \left(f_i^j \right) \end{array} \text{ は } F \equiv \begin{array}{c} \xrightarrow{j\text{列}} \\ \downarrow i\text{行} \left(f_j^i \right) \end{array} \text{ の転置行列とする。}$$

また、微係数 $\frac{dp(t)}{dt}$ を簡単に $\dot{p}(t)$ によって表わすことにする。

定義1. 与えられた制御 $u(\cdot,\cdot)$ に対して確率過程 $\{x(\omega,t),\ t\in[0,T]\}$ が $\Sigma(0)$-可測な $x(\omega,0)$ の初期分布が E^n 上の確率測度 μ_0 であるような(3)の解であるとは、

a) 各 $t\in[0,T]$ に対して

$$\{\omega : x(\omega,t)\in A\}\in\Sigma(t) \quad (A\in\mathscr{B}^n)$$

が成立ち、

b) $$x(\omega,t)=x(\omega,0)+\int_0^t f(x(\omega,\tau),u(\omega,\tau))d\tau+Z(\omega,t)-Z(\omega,0) \quad (4)$$

が高々 μ 測度零の ω-集合 N を除いて(確率1で)満足されて、

c) 初期条件: $$\mu\{\omega : x(\omega,0)\in A\}=\mu_0(A) \quad (A\in\mathscr{B}^n)$$

が成立つことである。

注意2. *Kushner* [10] は $\Sigma(t)$ を $Z(\cdot,\tau)$, $0\leqq\tau\leqq t$ が可測となる Ω 上の最小の σ-*field* として定義しただけで、初期分布

$x(\cdot, 0)$ の可測性をも含むように構成していなくて、(3)の解の定義として b) だけをもって定義していたので、筆者はもっと厳密に田中洋 & 長谷川実[1]を参考にしながら再定義した。

一般に制御 $u(\omega, t)$ は等号、または不等号の拘束に従う直積空間 $\Omega \times [0, T]$ 上で定義された確率過程である。許容制御は決定論的な時間連続型の系の場合には、区分的連続 (*piecewise continuous*)、あるいは区分的定数 (*piecewise constant*)、更には一般化して *Lebesgue* 可測函数として定義したのであるが、その場合に、最適制御は過去および現在の情報の函数、あるいは汎函数として決定された。確率的な系の場合には、前もって特に過去および現在の情報の函数、あるいは汎函数として最適制御を決定しないことを強調しておく。

いま、$\sum^*(t)$ は与えられた $\sum(t)$ の *sub* σ-*field* とする。

定義2. $u(\cdot, \cdot)$ が $\sum^*(t)$ に関する許容制御 ($\sum^*(t)$-*admissible control*) とは、次の4条件を満足する任意の確率過程として定義されるとき呼ばれる。

1) 殆んどすべての ω に対して $u(\cdot) = u(\omega, \cdot)$ が *Lebesgue* 積分可能で、かつ、

$$\int_0^T \| u(\omega, t) \| \, dt < +\infty \quad a.e.(\mu) \tag{5}$$

ここに、$\|u(t)\| = \sum_{k=1}^{r} |u^k(t)|$ とする。

2) $$\int_0^T E\|u(\omega,t)\|dt < +\infty \qquad (6)$$

3) 各 $t\in[0,T]$ に対して、$u(\cdot,t)$ は $\sum^*(t)$-可測である。

4) 各 $(\omega,t)\in\Omega\times[0,T]$ に対して、$u(\omega,t)\in\mathbb{U}(\omega,t)$ であること。

ここに制御域 $\mathbb{U}(\omega,t)$ は任意に与えられた r 次元ユークリッド空間 E^r 内の集合とする。

注意3. 上の定義2の条件3)は次のように解釈され得る。現時点 t における制御装置に役立ち得る唯一の情報は $\{x(\tau), z(\tau);\ \tau\leq t\}$ の汎函数であると考えられ、各瞬間における制御はもちろん、この情報の函数、または汎函数として構成可能であることを意味している。このことから、$\sum^*(t)$ は現時点 t において役立ち得る情報が可測となる最小の σ-algebra として解釈され得る。

然らば、以下で述べる補題1によると、各 $\sum^*(t)$-許容制御 $u(\cdot,\cdot)$ に対して方程式(3)の一意解が確率1で存在することが云える。

この一意解を改めて $x(\omega,t)$ によって表わすと、次のような最適制御問題が要求される。すなわち、

「$\sum^*(t)$-許容制御函数の全体 $\mathcal{A}$ の中から、危険(risk)と呼ばれる期待値

$$E[C'x(\omega,T)] \equiv E[\sum_{i=1}^{n} C^i x^i(\omega,T)] \tag{7}$$

を最小にする制御 $u(\cdot,\cdot)$ を求めよ。ここに、T は固定された最終時間とする。また、$C' \equiv (C^1,\cdots\cdots,C^n)$ は任意に与えられた n 次元の定数ベクトルとする。」

§3.　確率的な最大原理

最大原理を導くために、次の仮定をおく。

仮定：　次の5条件を満足するようなベクトル (x,u) に無関係な非確率的有限の定数 $K>0$ が存在するものとする。

(A1)　$|f^i(x,u)| \leqslant K(1+\|x\|+\|u\|)$　$(x\in E^n,\ u\in E^r)$

ここに、$\|x\| \equiv \sum_{i=1}^{n}|x^i|$,　$\|u\| \equiv \sum_{k=1}^{r}|u^k|$　とする。

(A2)　各 $f^i(x,u)$ は x と u に関して一様な *Lipschitz* 条件を満足する。i.e.任意の n 次元ベクトル δx と r 次元ベクトル δu に対して、

$$|f^i(x+\delta x,u+\delta u)-f^i(x,u)| \leqslant K(\|\delta x\|+\|\delta u\|)$$

(A3)　$Z(\cdot,\cdot)$ は (ω,t) に関して可測とし、かつ、

$$\int_0^T E\|Z(\omega,t)\|dt < +\infty$$

(A4)　各 i と j、および、任意のベクトル δx と δu に対して、

$$|f^i_{x^j}(x+\delta x,u+\delta u)-f^i_{x^j}(x,u)| \leqslant K(\|\delta x\|+\|\delta u\|)$$

(A5)　$f^i(x,u)$ は $x^1,\cdots\cdots,x^n$ に関して2回偏微分可能とする。

注意：　(A5)の仮定は[10]では省略していたので、筆者が付

け加えたものである。

<u>補題1.（解の存在性と一意性）</u>　(A1), (A2), (A3) を仮定し、$u(\cdot) \in \mathcal{A}$ とする。また、$\Sigma(0)$-可測な $x(\omega, 0)$ の初期分布 μ_0 が与えられて、かつ、

$$E\|x(\omega,0)\| \equiv \int_\Omega \|x(\omega,0)\| \mu(d\omega) = \int_{E^n} \|x\| \mu_0(dx) < +\infty \quad (8)$$

とする。然らば、高々 μ-測度零の ω-集合 N を除いて、方程式 (4) は Lebesgue 積分可能な一意解 $x(\omega, t)$ をもち、かつ、この一意解 $x(t) = x(\cdot, t)$ は各 $t \in [0, T]$ に対して $\Sigma(t)$-可測である。更に、

$$E\|x(t)\| < +\infty \quad (t \in [0,T]), \quad \int_0^T E\|x(t)\| dt < +\infty \quad (9)$$

が成立つ。

<u>注意1.</u>　N は $u(\cdot) \in \mathcal{A}$ の選択，および $z(\cdot)$ と $x(0)$ に依存する。

<u>注意2.</u>　補題1は通常の Picard の反復法によって導かれる。証明は [10] を参照せよ。

<u>注意3.</u>　特に $\{z(t), 0 \leq t \leq T\}$ が加法過程で、かつ、初期分布 $x(0)$ と $\mathbb{Z}_0^t \equiv \{z(\tau) - z(0) \,;\, \tau \in [0, t]\}$ $(t > 0)$ とが互に独立ならば，(4)の解は $x(t) = \varphi_{0,t}(x(0); \mathbb{Z}_0^t)$ なる形に一意に書けて，しかもマルコフ解となる。i.e.

$\forall A \in \mathcal{L}^n$,　$0 \leq {}^\forall t \leq {}^\forall s \leq T$　に対して、

$$\mu\{x(s) \in A \mid \mathbb{Z}_0^t, x(0)\} = \mu\{x(s) \in A \mid x(t)\} \quad \text{a.e.}(\mu)$$

ここに、$\mu\{A \mid B\}$ は事象Bを与えたとき、事象Aが起り得

る条件付確率を表わす記号とする。([11], [12] を参照せよ)

<u>補題2.</u>　(A1), (A2), (A3) を仮定する。$x(\cdot)$ を初期条件(8)を満足し、かつ、$u(\cdot)\in\mathcal{A}$ に対応する方程式(4)の解とする。$u(\cdot)+\delta u(\cdot)\in\mathcal{A}$ を $u(\cdot)$ の摂動制御とする。然らば、高々 μ-測度零の ω-集合 $\hat{N}\,(\supset N)$ を除いて、次のことが成立つ。

1) 制御 $u(\cdot)+\delta u(\cdot)$ に対応する初期条件(8)を満足する方程式(4)の Lebesgue 積分可能な解 $x(\cdot)+\delta x(\cdot)$ が一意的に存在する。

2) また、$\delta x(\cdot)$ は方程式

$$\delta x(t)=\int_0^t\left[f(x(\tau)+\delta x(\tau),u(\tau)+\delta u(\tau))-f(x(\tau),u(\tau))\right]d\tau \qquad (10)$$

を満足する。ここに、$\delta x(0)=0$ とする。

3) 次の方程式によって定義された函数 $\delta x(\cdot)$ は $[0,T]$ において Lebesgue 積分可能である。

$$\frac{d\delta x(t)}{dt}=f(x(t)+\delta x(t),u(t)+\delta u(t))-f(x(t),u(t)) \qquad (11)$$

4) 更に、$\delta x(t)$ は有界である。i.e.

$$\|\delta x(t)\|\leqslant K n e^{KnT}\int_0^T\|\delta u(\tau)\|d\tau \qquad (12)$$

<u>注意1.</u>　各 $t\in[0,T]$ に対して、$x(\cdot,t)$, $x(\cdot,t)+\delta x(\cdot,t)$ は $\Sigma(t)$-可測であるから、$\delta x(\cdot,t)$ もまた $\Sigma(t)$-可測である。

<u>注意2.</u>　1), 2), 3) の証明は補題1によって導かれ、4)の

証明は次の基本補題を適用することによって導かれる。

基本補題： $P(t),\ Q(t) \geqq 0$, $C_1 > 0$ ：定数とする。

a） $$P(t) \leqq C_1 + \int_{t_0}^{t} P(\tau) Q(\tau) d\tau \quad (t \geqq t_0) \tag{13}$$

$$\Rightarrow \quad P(t) \leqq C_1 \exp\left[\int_{t_0}^{t} Q(\tau) d\tau\right] \quad (t \geqq t_0) \tag{14}$$

b） $$P(t) \leqq C_1 + \int_{t}^{t_1} P(\tau) Q(\tau) d\tau \quad (t \leqq t_1) \tag{15}$$

$$\Rightarrow \quad P(t) \leqq C_1 \exp\left[\int_{t}^{t_1} Q(\tau) d\tau\right] \quad (t \leqq t_1) \tag{16}$$

注意3： この基本補題の証明は *R. Bellman* & *K. Cooke* [13] を参照せよ。

補題3． (A1)～(A4)を仮定する．最適制御 $u(\cdot)$ が存在するものと仮定し、かつ、高々 μ- 測度零の ω- 集合 N を除いて $x(\cdot)$ は $u(\cdot) \in \mathcal{A}$ に対応する初期条件(8)を満足する(4)の解とする。 $p'(\cdot) \equiv (p^1(\cdot), \cdots\cdots, p^n(\cdot))$ は次の線型微分方程式系の解として定義される補助函数とする。

$$dp^i(t) = -\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f^j(x(t), u(t))}{\partial x^i} p^j(t)\, dt, \quad i = 1, 2, \cdots, n \tag{17}$$

ベクトル形式で、 $$dp(t) = -f_x'(x(t), u(t)) p(t)\, dt \tag{18}$$

境界条件： $$p(T) = C \tag{19}$$

1） 然らば、各 $\omega \in \Omega - N$ に対して、(18), (19) の解は存在して一意的であり、かつ、ω と t に関して一様有界である；

$$\| p(\omega, t) \| \leqq \| C \| e^{KnT} \tag{20}$$

また、$\frac{dp(t)}{dt}$ の各成分は Lebesgue 積分可能であり、かつ、$p(\cdot, t)$, $0 \leqq t \leqq T$ は $\Sigma(T)$-可測函数である。

2) いま、任意の $\hat{u}(\cdot) \in \mathcal{A}$ に対して、スカラーの函数

$$H(x(t), \hat{u}(t), p(t)) \equiv p'(t) f(x(t), \hat{u}(t)) = \sum_{i=1}^{n} p^i(t) f^i(x(t), \hat{u}(t)) \qquad (21)$$

を定義すると、H は高々 μ-測度零の ω-集合 $\hat{N}(\supset N)$ を除いて十分に定義されて、かつ、Lebesgue 積分可能であり、しかも各 $t \in [0, T]$ に対して $\Sigma(T)$-可測である。更に、

$$\int_0^T E\left|H(x(t), \hat{u}(t), p(t))\right| dt < +\infty \qquad (22)$$

注意： 不等式 (20) は仮定 (A2) と (A4)、および基本補題の b) を用いることによって導かれる。

定理 1.（Kushner の最大原理） (A1)〜(A5) を仮定する。然らば、$u(\cdot)$ が最適制御であるためには、任意の $\hat{u}(\cdot) \in \mathcal{A}$ に対して、高々 μ-測度零の ω-集合 $\hat{N}$ を除いて、不等式：

$$E[H(x(t), u(t), p(t)) | \Sigma^*(t)] \leqq E[H(x(t), \hat{u}(t), p(t)) | \Sigma^*(t)] \qquad (23)$$

が高々 Lebesgue 測度零の t-集合 A_ω を除いて成立つことが必要である。

注意 1. (23) における条件付期待値は $\forall B \in \Sigma^*(t)$ に対して、

$$\int_B E[H(x(t), \hat{u}(t), p(t)) | \Sigma^*(t)] \mu(d\omega) = \int_B H(x(t), \hat{u}(t), p(t)) \mu(d\omega) \qquad (24)$$

なる性質をもつ$\Sigma^*(t)$-可測函数として、*Radon-Nikodym*の定理によって定義された条件付期待値である。（*E. B. Dynkin*[14]を参照せよ。）

<u>注意2.</u>　(23)の最小値はtにおいてのみ役立ち得る情報の函数として最適制御$u(\cdot)$を決定し得ることを意味している。直観的には、

$$E[H(x(t),\hat{u}(t),p(t))\,|\,t\text{において役立ち得る情報}] \qquad (25)$$

の最小化によって、置き換えても差し支えない。

<u>注意3.</u>　$x(\cdot,t)$，および$\hat{u}(\cdot,t)$が特に$\Sigma^*(t)$-可測であるときには、

$$\begin{aligned} E[H(x(t),\hat{u}(t),p(t))\,|\,\Sigma^*(t)] &= E[p'(t)f(x(t),\hat{u}(t))\,|\,\Sigma^*(t)] \\ &= E[p'(t)\,|\,\Sigma^*(t)]f(x(t),\hat{u}(t)) \qquad (26) \end{aligned}$$

であるから、不等式(23)の代りに、次の不等式を適用すればよい。

$$E[p'(t)\,|\,\Sigma^*(t)]f(x(t),u(t)) \leqq E[p'(t)\,|\,\Sigma^*(t)]f(x(t),\hat{u}(t)) \qquad (27)$$

特に、$\Sigma^*(t) \equiv \Sigma(t)$　なる場合には、$x(\cdot,t)$は$\Sigma^*(t)$-可測となるから、(27)が成立つ。

<u>定理1の証明</u>：

1°　<u>摂動制御にともなう*risk*の評価</u>：　最大原理の証明法としては、決定論的な場合には、*L. S. Pontryagin*[2]による幾何学的な考察法と*L. I. Rozonoér*[3]による解析学的な

考察法がよく知られているが、H.J. Kushner [10] は確率的な場合の最大原理を Rozonoér の解析法の類似によって証明している。実際、摂動制御 $\hat{u}(\cdot) \equiv u(\cdot) + \delta u(\cdot) \in \mathcal{A}$ に対応する(4)の解を $\hat{x}(\cdot) \equiv x(\cdot) + \delta x(\cdot)$ として、risk の増分 $EC'\delta x(T)$ を Hamiltonian H を用いて評価することができる。定義(21)によって、

$$0 = -\int_0^T p'(t)\left[f(x(t)+\delta x(t), u(t)+\delta u(t)) - f(x(t), u(t))\right]dt$$
$$+ \int_0^T \left[H(x(t)+\delta x(t), u(t)+\delta u(t), p(t)) - H(x(t), u(t), p(t))\right]dt \quad (25)$$

ここに、補題2、および補題3によると、$\delta \dot{x}(t)$, および $\dot{p}(t)$ は各 $\omega \in \Omega - N$ に対して Lebesgue 積分可能であるから、(25)の最初の積分は部分積分可能である。故に、

$$-\int_0^T p'(t)\,\delta\dot{x}(t)\,dt = -p'(t)\delta x(t)\Big|_{t=0}^{T} + \int_0^T \delta x'(t)\,\dot{p}(t)\,dt \quad (26)$$

然るに、(A5)によると、$H(x, u, p)$ は $x^1, \cdots, x^n$ に関して2回偏微分可能であるから、Taylor の展開公式によって、次の式を得る。

$$H(x(t)+\delta x(t), u(t)+\delta u(t), p(t))$$
$$= H(x(t), u(t)+\delta u(t), p(t)) + p'(t) f_x(x(t), u(t))\delta x(t) + R \quad (27)$$

ここに、$R \equiv \frac{1}{2}\sum_{i,j,k} p^i(t) f^i_{x^j x^k}(x(t)+\theta\delta x(t), u(t)+\delta u(t))\delta x^j(t)\delta x^k(t)$
$$+ p'(t)\left[f_x(x(t), u(t)+\delta u(t)) - f_x(x(t), u(t))\right]\delta x(t) \quad (28)$$
$$0 \leqq \theta \leqq 1$$

然るに、$-f_x'(x(t),u(t))p(t)=\dot{p}(t)$ & $p(T)=C$, $\delta x(0)=0$ であるから、(25),(26),(27),(28) によって、次の式を得る。

$$C'\delta x(T)=\int_0^T \delta H\,dt+\int_0^T R\,dt \tag{29}$$

ここに、$\delta H \equiv H(x(t),u(t)+\delta u(t),p(t))-H(x(t),u(t),p(t))$ (30)

一方、(A2),(A4),(A5)、および補題3の(20) 式によると、

$$|R| \leqslant B_1\|\delta x(t)\|^2+B_2\|\delta u(t)\|\cdot\|\delta x(t)\| \tag{31}$$

ここに、$B_1 \equiv \frac{1}{2}MK$, $B_2 \equiv \dot{M}K$, $M \equiv \|C\|e^{KnT}$ (有限定数)

したがって、補題2 の(12) によると、

$$\int_0^T |R|\,dt \leqslant B\left\{\int_0^T \|\delta u(\tau)\|\,d\tau\right\}^2 \tag{32}$$

ここに、$B \equiv (B_1 n+1)B_2^2 Kn$ (有限定数) とする。

2° 最大原理の証明: 最大原理が成立たない $\tilde{\Sigma}$ 上の (ω,t)-集合をAとおく。$m(A)>0$ と仮定すると、矛盾することを示そう。然らば、

$\exists\,\delta u(\cdot)\in\mathcal{A}$: $(\omega,t)\in A$ のとき

$E[\delta H|\Sigma^*(t)]<0$ & $\delta u(\cdot)\neq 0$

したがって、十分小さいある正の数 r が存在して、この $r>0$ に対して、$\exists\,A(r)\subset A$:

$(\omega,t)\in A(r)$ のとき、$E[\delta H|\Sigma^*(t)]<-r<0$ & $\delta u(\cdot)\neq 0$

ここに、$A(r)$ は $m(A(r))>0$ が十分小さくなるように適当に選び得る。

いま、$u(\cdot)$ の摂動制御として、

$$
\begin{aligned}
\hat{u}(\cdot) &= u(\cdot) + \delta u(\cdot) && (\omega,t)\in A(r) \\
&= u(\cdot) && (\omega,t)\notin A(r) \\
\text{i.e.}\quad \overset{*}{\delta}u(\cdot) &\neq 0 && (\omega,t)\in A(r) \\
\overset{*}{\delta}u(\cdot) &= 0 && (\omega,t)\notin A(r)
\end{aligned}
\tag{33}
$$

を考えることにする。但し、$\delta^* u(\cdot) \equiv \hat{u}(\cdot) - u(\cdot)$ とする。

$A_t(r) \equiv \{\omega\ ;\ (\omega,t)\in A(r)\}$: $A(r)$のΩ上への射影

$A_\omega(r) \equiv \{t\ ;\ (\omega,t)\in A(r)\}$: $A(r)$の$[0,T]$上への射影

とおくと、$A_t(r)\in\Sigma^*(t)$，$A_\omega(r)\in\mathscr{B}'[0,T]$ となる。

$\tau(\omega) \equiv d\{t\ ;\ t\in A_\omega(r)\}$: $A_\omega(r)$の*Lebesgue*測度

とする。然るに、

$$
\sup_{\omega,t}\|\overset{*}{\delta}u(\omega,t)\| \equiv b < +\infty \tag{34}
$$

と仮定しても制限されない。

さて、補題3の2)より、$\int_0^T E|\delta H|dt < +\infty$ であるから、*Fubini*の定理によって、積分の順序交換が可能となり、

$$
\begin{aligned}
E\int_0^T \delta H\,dt &= \int_0^T dt\int_{A_t(r)} \delta H\,\mu(d\omega) \\
&= \int_0^T dt\int_{A_t(r)} E[\delta H\,|\,\Sigma^*(t)]\,\mu(d\omega) \\
&< -r\int_0^T dt\int_{A_t(r)} \mu(d\omega) = -r\,m(A(r)) < 0
\end{aligned}
\tag{35}
$$

一方、評価式(32)、および(34)によって、

$$
\begin{aligned}
E\int_0^T |R|\,dt &\leqq b^2 B\left\{\int_0^T dt\int_{A_t(r)}\mu(d\omega)\right\}\sup_\omega \tau(\omega) \\
&= B_0\,m(A(r))\sup_\omega \tau(\omega)
\end{aligned}
\tag{36}
$$

ここに、$B_0 \equiv b^2 B > 0$（有限定数）とする。したがって、
(29)，(35)，(36)を結合すると、

$$E[C'\delta x(T)] < [-r + B_0 \sup_{\omega} \tau(\omega)]\, m(A(r)) \qquad (37)$$

ところで、$B_0 > 0$ は有限定数であるから、$-r + B_0 \sup_{\omega} \tau(\omega) < 0$ と同時に、$m(A(r)) > 0$ となるような十分小さい $\sup_{\omega} \tau(\omega)$、したがって、$A(r)$ を取ることができる。この $A(r)$ を適用してつくった摂動制御 $\hat{u}(\cdot)$ に対しては、(37)によって、

$$E[C'\delta x(T)] < 0$$

となる。これは $u(\cdot)$ の最適性の条件 $E[C'\delta x(T)] \geqq 0$ に矛盾する。したがって、$m(A) = 0$ を得る。このことは最大原理が成立つことを示している。 （定理1の証明終）

§4. 線型系の場合

定理1（最大原理）は一般に非線型系の場合には、最適制御のための必要条件であることが分ったが、[10]では最適制御のための十分性の検討を試みていない。特に、次のような線型系の場合には、最大原理が必要かつ十分条件であることを筆者は次の定理2．で述べる。

定理2． 記号的に、

$$\overset{n\times 1}{dx}(\omega,t) = [\overset{n\times n}{A(t)}\,\overset{n\times 1}{x(\omega,t)} + \overset{n\times 1}{b}(t,u(\omega,t))]\,dt + \overset{n\times 1}{dZ}(\omega,t) \qquad (38)$$

$$\text{i.e. } x(\omega,t) = x(\omega,0) + \int_0^t [A(\tau)x(\omega,\tau) + b(\tau,u(\omega,\tau))]\,d\tau + Z(\omega,t) - Z(\omega,0) \qquad (39)$$

なる制御過程を考える。ここに、$x(\omega,t)$, $z(\omega,t)$ は n 次元のベクトル函数，更に $u(\omega,t)$ は r 次元の制御ベクトル函数とする。

$$A(t) = \begin{pmatrix} a_1^1(t) & \cdots & a_n^1(t) \\ \vdots & & \\ a_1^n(t) & \cdots & a_n^n(t) \end{pmatrix}$$ は各 $t\in[0,T]$ に対して定義された

E^n から $E^{n\times n}$ の中への線型作用素とし、また、$b(t,u)$ は直積区間 $[0,T]\times E^r$ において定義された n 次元のベクトル函数とする。

<u>仮定</u>： $^{\exists}K>0$ ： t と u に無関係な非確率的有限定数；

(B1)　$|a_j^i(t)|\leqq K$　　$i,j=1,2,\cdots,n$

(B2)　$|b^i(t,u)|\leqq K(1+\|u\|)$

(B3)　$|b^i(t,u+\delta u)-b^i(t,u)|\leqq K\|\delta u\|$　$(\delta u\in E^r)$

(B4)　$z(\cdot,\cdot)$ は (ω,t) に関して可測とし、$\int_0^T E\|z(\omega,t)\|dt<+\infty$ とする。このとき、定義２で与えられた $\Sigma^*(t)$-許容制御のクラス $\mathcal{A}$ の間で risk (7) を最小にする制御 $u(\cdot,\cdot)$ を求めよという最適制御問題をやはり考える。この場合補助システムは

$$\frac{dp(t)}{dt}=-A'(t)p(t)\ ,\quad 境界条件：p(T)=C \qquad (40)$$

なる決定論的な線型方程式系である。(40) の基本解系を $[\Phi'(T,t)]^{-1}$、但し、$\Phi(T,T)=I$ ($n\times n$-単位行列)，とすると、(40) の解は

$$p(t)=[\Phi'(T,t)]^{-1}C \qquad (41)$$

となる。然らば、$u(\cdot)$ および対応する解 $x(\cdot)$ が最適であるための必要かつ十分条件は、任意の $\hat{u}(\cdot)\in\mathcal{A}$ に対して、高々 μ-

測度零の ω-集合 $\hat{N}$ を除いて 不等式

$$p'(t)\,b(t, u(\omega,t)) \leq p'(t)\,b(t, \hat{u}(\omega,t)) \tag{42}$$

$$\text{i.e.} \quad C'\Phi^{-1}(T,t)\,b(t,u(\omega,t)) \leqslant C'\Phi^{-1}(T,t)\,b(t,\hat{u}(\omega,t)) \tag{43}$$

が高々 *Lebesgue* 測度零の t-集合 A_ω を除いて成立つことである。

<u>定理2の証明</u>： 線型系(38)の場合には、ハミルトニアンは

$$H(x(t), \hat{u}(t), p(t)) = p'(t)[A(t)x(t) + b(t, \hat{u}(t))] \tag{44}$$

であり、また、(29)における剰余項は $R \equiv 0$ である。

したがって、$E[\delta H \mid \Sigma^*(t)] \geqslant 0 \quad a.e.(m)$ ならば、

$$E[C'\delta x(T)] = E\left[\int_0^T \delta H\, dt\right] = \int_0^T \int_\Omega E[\delta H \mid \Sigma^*(t)]\,\mu(d\omega)\,dt \geqslant 0$$

となり、$u(\cdot) \in \mathcal{A}$，$x(\cdot)$ は最適である。このことは最適制御のための十分性を確かに保証している。 （定理2の証明終）

§5. 最大原理とD.P.法との関係

次に最大原理とD.P.法との間に密接な関係があることを述べるために、特に、<u>$z(\cdot)$ が *Brown* 運動であると</u>仮定する。

ここに、記号的に(!)

$$E[dz^i(t)] = 0, \quad E[dz^i(t)\,dz^j(t)] = \sigma_{ij}^2(t)\,dt \tag{45}$$

$$i, j = 1, 2, \cdots\cdots, n$$

とする。この場合には、<u>現在の状態 $x(t)$ がもち得る情報と考えてよい</u>。

注意1.　このことについては、Kushner[10]は厳密に証明していなかったが、最近になってW.H.Fleming[19]によって、保証されている。(H.J. Kushner[17]および)

t_0を与えられた時間，x_0を与えられたn次元のベクトルとして、初期条件$x(t_0)=x_0$を満足する最適制御$u(t)$，$t_0\leq t\leq T$，に対応する(4)の解を$x(t)$とする。更に任意の$\sum^*(t)$-許容制御$\hat{u}(\cdot)$に対応し、かつ同じ初期条件$\hat{x}(t_0)=x_0$を満足する(4)の解を$\hat{x}(\cdot)$，$t_0\leq t\leq T$，とする。このとき、

$$V(x_0,t_0;\hat{u})\equiv E[C'\hat{x}(T)\,|\,\hat{x}(t_0)=x_0;\hat{u}(t),t_0\leq t\leq T] \tag{46}$$

$$V(x_0,t_0)\equiv\min_{\substack{\hat{u}(\cdot)\in\mathcal{A}\\ t_0\leq t\leq T}} V(x_0,t_0;\hat{u}) \tag{47}$$

と定義する。J.J. Florentin[15]，およびH.J. Kushner[10]は$V(x(t),t)$によって満足される偏微分方程式を良く知られているR. Bellmanの最適性の原理[1]を用いて形式的に誘導しているが、筆者は次の定理3が成立つための制限条件として、(A1)～(A5)の他に次の条件を仮定することにした。

(A6)　$V(x_0,t_0)$はx_0, t_0に関して3回偏微分可能とし、その3階の偏微係数はすべて一様有界と仮定する。

定理3.　条件(A1)～(A6)の下では、$V(x(t),t)=E[C'x(T)|x(t)]$は次の偏微分方程式と境界条件を満足する。

$$\frac{\partial V(x(t),t)}{\partial t} + \min_{u \in \mathcal{J}(t)} \left[(\mathrm{grad}_x V(x(t),t))' f(x(t),u) \right] + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial^2 V(x(t),t)}{\partial x^i \partial x^j} \sigma_{ij}(t) = 0 \quad (48)$$

但し、境界条件： $V(x(T),T) = C' x(T)$ (49)

<u>注意2.</u> (A6)の条件を実際に検討することは非常に困難であり、これがD.P.法の欠点とも云える。

<u>定理3の証明</u>： 系のMarkov性に注意して、Chapman-Kolmogorovの定理[12]を適用すると、

$$p(\hat{x},T|x_0,t_0;\hat{u}) = \int_{E^n} p(\hat{x},T|x_0+\Delta x_0,t_0+\Delta t_0;\hat{u})\, dG(\Delta x_0|x_0,t_0;\hat{u}) \quad (50)$$

ここに、E^n：n次元ユークリッド空間、

$p(\hat{x},T|x_0,t_0;\hat{u})$： $\hat{u}(\cdot) \in \mathcal{A}$ によって初期状態(x_0,t_0)から最終状態$(\hat{x},T)$へ転移されるときの遷移確率密度、

$G(\Delta x_0|x_0,t_0;\hat{u})$： $\hat{u}(\cdot) \in \mathcal{A}$ によって初期状態(x_0,t_0)から状態$(x_0+\Delta x_0, t_0+\Delta t_0)$へ転移されるときの増分$\Delta x_0$の確率分布とする。

Δt_0：十分小さい正の数；

$$\Delta x_0 = f(x(t_0), \hat{u}(t_0))\Delta t_0 + \Delta Z(t_0) \quad (51)$$

$$\Delta Z(t_0) \equiv Z(t_0+\Delta t_0) - Z(t_0) \quad (52)$$

$$E[\Delta Z^i(t_0)] = 0, \quad E[\Delta Z^i(t_0)\Delta Z^j(t_0)] = \sigma_{ij}(t_0)\Delta t_0 \quad (i,j=1,\cdots,n) \quad (53)$$

(50)の両辺に、$C'\hat{x}$を乗じて$\hat{x}$に関してE^n上で積分すると、

$$
\begin{aligned}
E[C'\hat{x}(T)|x_0,t_0;\hat{u}] &= \int_{E^n} C'\hat{x}\,p(\hat{x},T|x_0,t_0;\hat{u})\,d\hat{x} \\
&= \int_{E^n} C'\hat{x}\left[\int_{E^n} p(\hat{x},T|x_0+\Delta x_0,t_0+\Delta t_0;\hat{u})\,dG(\Delta x_0|x_0,t_0;\hat{u})\right]d\hat{x} \\
&= \int_{E^n} E[C'\hat{x}(T)|x_0+\Delta x_0,t_0+\Delta t_0;\hat{u}]\,dG(\Delta x_0|x_0,t_0;\hat{u})
\end{aligned}
$$

したがって、定義(46)によって、

$$
V(x_0,t_0;\hat{u}) = \int_{E^n} V(x_0+\Delta x_0,t_0+\Delta t_0;\hat{u})\,dG(\Delta x_0|x_0,t_0;\hat{u}) \tag{54}
$$

更に、R. Bellmanの最適性の原理[1]：「最適政策(制御)は初期の状態および初期の決定(制御)が何であろうとも、それ以後の決定(制御)は初期の決定(制御)によって生じた状態に関して最適政策(制御)でなければならないという性質をもっている」ことを適用すると、

$$
V(x_0,t_0) = \min_{\substack{\hat{u}(t)\in U(t)\\ t_0\le t\le t_0+\Delta t_0}} \int_{E^n} V(x_0+\Delta x_0,t_0+\Delta t_0)\,dG(\Delta x_0|x_0,t_0;\hat{u}) \tag{55}
$$

然るに、仮定(A6)によって、$V(x_0+\Delta x_0,t_0+\Delta t_0)$を点$(x_0,t_0)$において$x^1,\cdots,x^n,t$に関して3位の項迄Taylor展開すると、

$$
\begin{aligned}
V(x_0+\Delta x_0,t_0+\Delta t_0) = V(x_0,t_0) &+ V_t(x_0,t_0)\Delta t_0 + \sum_{i=1}^{n} V_{x^i}(x_0,t_0)\Delta x_0^i \\
&+ \frac{1}{2}\Big[V_{tt}(x_0,t_0)\Delta t_0^2 + 2\sum_{i=1}^{n} V_{tx^i}(x_0,t_0)\Delta t_0\Delta x_0^i \\
&+ \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} V_{x^ix^j}(x_0,t_0)\Delta x_0^i\Delta x_0^j\Big] + \eta
\end{aligned} \tag{56}
$$

ここに、

$$
\begin{aligned}
\eta \equiv \frac{1}{6}\Big[& V_{ttt}(x_0+\theta\Delta x_0,t_0+\theta\Delta t_0)\Delta t_0^3 + 3\sum_{i=1}^{n} V_{ttx^i}(x_0+\cdots,t_0+\Delta t_0)\Delta t_0^2\Delta x_0^i \\
&+ 3\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} V_{tx^ix^j}(x_0+\theta\Delta x_0,t_0+\theta\Delta t_0)\Delta t_0\Delta\cdots\Delta x_0^j \\
&+ \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} V_{x^ix^jx^k}(x_0+\theta\Delta x_0,t_0+\theta\Delta t_0)\cdots\Delta x_0^j\Delta x_0^k\Big],
\end{aligned} \tag{57}
$$

$\theta \equiv \theta(\Delta x_0, \Delta t_0)$ ，$0 \leqslant \theta \leqslant 1$ とする。

然るに、(51)，(52)，(53)，更に(A6)により、

$$E[\Delta x_0^i \mid x_0, t_0 ; \hat{u}(\cdot)] = f^i(x(t_0), \hat{u}(t_0))\Delta t_0 \qquad (58)$$

$$E[\Delta x_0^i \Delta x_0^j \mid x_0, t_0 ; \hat{u}(\cdot)] = \sigma_{ij}(t_0)\Delta t_0 + o(\Delta t_0) \quad (\Delta t_0 \to 0) \qquad (59)$$

$$E[\zeta \mid x_0, t_0 ; \hat{u}(\cdot)] = o(\Delta t_0) \quad (\Delta t_0 \to 0) \qquad (60)$$

ここに、$\lim_{\Delta t_0 \to 0} \frac{o(\Delta t_0)}{\Delta t_0} = 0$ と定義する。

(∵) $\Delta Z^i(t_0)$ が平均 0，分散 $\sigma_{ii}\Delta t_0$ の正規分布に従うならば、

次の公式が成立つ；

i) m が奇数のとき，$E(\Delta Z^i(t_0))^m = 0$ (61)

ii) m が偶数のとき，$E(\Delta Z^i(t_0))^m = (m-1)\,\sigma_{ii}\Delta t_0\, E(\Delta Z^i(t_0))^{m-2}$

$$= (m-1)(m-3)\cdots 3\cdot 1\cdot(\sigma_{ii}\Delta t_0)^{\frac{m}{2}} \qquad (62)$$

この公式と Schwarz の不等式を用いると、

$$\left| E[\Delta Z^i(t_0)\Delta Z^j(t_0)\Delta Z^k(t_0)] \right| \leqslant \sqrt{3\sigma_{ii}\sigma_{jj}\sigma_{kk}}\,(\Delta t_0)^{\frac{3}{2}} = o(\Delta t_0)$$

$$\therefore\ E[\Delta x_0^i \Delta x_0^j \Delta x_0^k] = o(\Delta t_0)$$

このことから (60) が導かれる。

したがって、(56) を Δx_0 に関して E^n 上で積分して (55) に代入すると、

$$V(x_0, t_0) = \min_{\substack{\hat{u}(t) \in U(t) \\ t_0 \leqslant t \leqslant t_0 + \Delta t_0}} \Big[V(x_0, t_0) + V_t(x_0, t_0)\Delta t_0 + \sum_{i=1}^{n} V_{x^i}(x_0, t_0) f^i(x(t_0), \hat{u}(t_0))\Delta t_0 + \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{n} V_{x^i x^j}(x_0, t_0)\,\sigma_{ij}(t_0)\Delta t_0 + o(\Delta t_0) \Big] \quad (\Delta t_0 \to 0) \qquad (63)$$

ここで、両辺から $V(x_0, t_0)$ を消去してから $\Delta t_0 > 0$ で割り、更に $\Delta t_0 \downarrow 0$ とすると、

$$0 = V_t(x_0, t_0) + \min_{\hat{u}(t_0) \in U(t_0)} \left[\sum_{i=1}^{n} V_{x^i}(x_0, t_0) f^i(x(t_0), \hat{u}(t_0)) \right] + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^{n} V_{x^i x^j}(x_0, t_0) \sigma_{ij}(t_0) \quad (64)$$

然るに、(x_0, t_0)は任意に選び得るから、(x_0, t_0)として最適過程におけける状態$(x(t), t)$を適用すると、(48) が導かれる。（定理3の証明終）

次にある正則性の条件を仮定すると、最大原理とD.P.法との間に密接な関係があることが次の定理4で示される。

定理4.（H.J. Kushner）　(A1)～(A5)の他に次の(A7),(A8)を仮定する。（(A6)を仮定しない）

(A7)　$f^i(x, u)$ が $u^1, \cdots, u^r$ に関して1回偏微分可能とする。

(A8)　更に許容制御 $\hat{u}(\cdot,\cdot)$は$x(t)$とtの函数とし、かつxに関して一様Lipschitz条件：

$$\| \hat{u}(x(t) + \varepsilon, t) - \hat{u}(x(t), t) \| \leqq K \| \varepsilon \| \quad (65)$$

を満足するものとする。ここに、Kは$x(t)$とtに無関係な有限定数とする。

$u(\cdot,\cdot)$：最適制御，

$x(\cdot)$　：　$u(\cdot,\cdot)$ および初期条件 $x(\cdot)$ に対応する最適過程，

$\delta x(\cdot)$　：　$x(\cdot)$ に関する摂動とする。

$$\hat{u}(x(t) + \delta x(t), t) \equiv u(x(t), t) + \delta u(x(t), t, \delta x(t)) \quad (66)$$

$\delta u(x(t), t, \delta x(t)) \equiv \delta u(\delta x(t))$　として書き表わすことにする。ここに、$\delta u(0) = 0$，また $\delta u(\cdot)$ は $x(t)$ に関して一様に

Lipschitz 条件(65)を満足するものとする。

然らば、確率1をもって次の性質が成立つ。

$$1^\circ \quad E[p'(t)\delta x(t) \mid x(0), \delta x(0)] = \tilde{C} + 0(\delta x(0)) \qquad (67)$$

ここに、$\lim\limits_{\|\varepsilon\|\to 0} \dfrac{0(\varepsilon)}{\|\varepsilon\|} = 0$ と定義する。また $\tilde{C}$ は t に無関係な定数とする。

$$2^\circ \text{ 更に } \quad grad_x V(x(t), t) = E[p(t) \mid x(t)] \qquad (68)$$

注意3：したがって、もし偏微分方程式(48)，(49) が $V(x(t), t) = E[C'x(T) \mid x(t)]$ なる一意解をもつならば、(48)，(49) と最大原理(23)とは同一の最適制御を与えることになる。

注意4：定理4を証明するために、次の2つの補題を準備する。

補題4．(A1)～(A5)，& (A7)，(A8) を仮定する。然らば確率1で、

$$\delta\dot{x}(t) = f_x(x(t), u(x(t), t))\delta x(t) + f_u(x(t), u(x(t), t))\delta u(\delta x(t)) + 0(\delta x(t)) \qquad (69)$$

が成立つ。

証明：補題2の3)，更に、(A4)と(A7) によって、

$$\delta\dot{x}^i(t) = f^i(x+\delta x, u+\delta u) - f^i(x, u) = \sum_{j=1}^{n} f^i_{x^j}(x, u)\delta x^j + \sum_{l=1}^{r} f^i_{u^l}(x, u)\delta u^l + \eta$$

ここに、$\eta = 0(\sqrt{\|\delta x\|^2 + \|\delta u\|^2}) = 0(\|\delta x(t)\|)$ である。

(∵) (A8) によって $\|\delta u(t)\| \leqq K\|\delta x(t)\|$ であることから知れる。

補題5．(A1)～(A5)，& (A7)，(A8) を仮定する。

$\Phi(T, t)$ を線型系 $\delta\dot{x} = f_x(x, u)\delta x$ の基本行列とする。

ここに、$\Phi(T, T) = I$ (n×n 単位行列) とする。($\Phi(T, t)$ は存在

$\underbrace{\qquad\qquad\qquad\qquad}_{}$ i.e. $\|\Phi(\tau,t)\| \leqq n e^{KnT} < +\infty$

て、かつ殆んどすべてのωに対して一様有界である。)然らば、

$$\delta x(t) = \Phi(t,0)\delta x(0) + \int_0^t \Phi(t,\tau) f_u(x,u)\delta u\, d\tau + o(\delta x(0)) \quad (70)$$

が成立つ。

証明：$\delta x(t) = \delta x(0) + \int_0^t [f(x(\tau)+\delta x(\tau), u(\tau)+\delta u) - f(x(\tau),u(\tau))]d\tau$

$$\therefore \|\delta x(t)\| \leqq \|\delta x(0)\| + \int_0^t Kn(\|\delta x(\tau)\| + \|\delta u\|)d\tau \quad (\because \text{(A2)より})$$

$$\leqq \|\delta x(0)\| + \int_0^t Kn(1+K)\|\delta x(\tau)\| d\tau \quad (\because \text{(A8)より})$$

ここで、基本補題の(a)を用いると、

$$\|\delta x(t)\| \leqq \|\delta x(0)\| e^{Kn(1+K)T} \quad (0 \leqq t \leqq T) \quad (71)$$

したがって、$\|\delta x(0)\|$ に dominate されないある $\xi(t)$ が存在して、

$$\delta x(t) = \|\delta x(0)\| \xi(t) + o(\|\delta x(0)\|) \quad (0 \leqq t \leqq T) \quad (72)$$

ここに、$\|\xi(t)\| \leqq e^{Kn(1+K)T}$ である。

また(A8)によって、

$$\|\delta u\| \leqq K\|\delta x(t)\| \leqq K[\|\delta x(0)\| \xi(t) + o(\|\delta x(0)\|)]$$

したがって、$\|\delta x(0)\|$ に dominate されないある $v(t)$ が存在して、

$$\delta u(\delta x(t)) = \|\delta x(0)\| v(t) + o(\|\delta x(0)\|) \quad (0 \leqq t \leqq T) \quad (73)$$

(72)の両辺を微分すると、

$$\delta \dot{x}(t) = \|\delta x(0)\| \dot{\xi}(t) + o(\|\delta x(0)\|) \quad (74)$$

一方、(69)の右辺に(72)と(73)を代入すると、

$$\delta \dot{x}(t) = f_x(x,u)\|\delta x(0)\| \xi(t) + f_u(x,u)\|\delta x(0)\| v(t) + o(\|\delta x(0)\|) \quad (75)$$

(74)と(75)を結合させて、両辺を $\|\delta x(0)\| > 0$ で割ると、

$$\dot{\xi}(t) = f_x(x,u)\xi(t) + f_u(x,u)v(t) + o(1) \quad (\|\delta x(0)\| \to 0) \quad (76)$$

然るに、(76) は十分小さい任意の正数 $\|\delta x(0)\|>0$ に対して成立つから、$\|\delta x(0)\|\rightarrow 0$ なる極限操作を行うと、

$$\dot{\xi}(t) = f_x(x,u)\,\xi(t) + f_u(x,u)\,v(t) \tag{77}$$

したがって、$\dot{\Xi}(t) = f_x(x,u)\,\Xi(t)$, $\Xi(T)=I$ ($n\times n$-単位行列)

の基本解系を $\Phi(T,t)$ によって表わすと、(77) の解は

$$\xi(t) = \Phi(t,0)\,\xi(0) + \int_0^t \Phi(t,\tau)\left[f_u(x(\tau),u(\tau))\,v(\tau)\right]d\tau \tag{78}$$

と一意的に表わされる。今(78)の両辺に $\|\delta x(0)\|$ を乗じて、(72)と(73)を考慮すると、(70)が導かれる。　　(補題5の証明終)

<u>定理4の証明</u>：

1° 補題3によると、

$$\left.\begin{array}{ll}\dot{p}(t) = -f_x'(x(t),u(t))\,p(t), & p(T)=C \\ p(t) = \left[\Phi'(T,t)\right]^{-1}p(T) & \end{array}\right\}\text{a.e.}(\mu) \tag{79}$$

いま、(70) における各項に $p(t)$ を前方から乗ずると、

$$p'(t)\Phi(t,s) = p'(T)\Phi^{-1}(T,t)\Phi(t,s) = p'(T)\Phi^{-1}(T,s) = p'(s) \quad (0\leqslant s\leqslant t) \tag{80}$$

であるから、次の式が得られる。

$$p'(t)\,\delta x(t) = p'(0)\,\delta x(0) + \int_0^t p'(\tau)\,f_u(x(\tau),u(\tau))\,\delta u\,d\tau + o(\delta x(0)) \tag{81}$$

然るに、δu は大きさに関して拘束されないから、最大原理

$$E\left[p'(t)\,f(x(t),u)\,|\,x(t)\right] \tag{82}$$

の最小化は次の式を与える。

$$E\left[p'(t)\,|\,x(t)\right]f_u(x(t),u(t)) = 0 \quad \text{a.e.}(\mu)\ (0\leqslant t\leqslant T) \tag{83}$$

したがって、(81)の両辺の期待値をとると、

$$E[p'(t)\delta x(t)\mid x(0),\delta x(0)] = E[p'(0)\mid x(0)]\delta x(0) + o(\delta x(0)) \quad a.e.(\mu) \tag{84}$$

然るに、$E[p'(0)|x(0)]\delta x(0) \equiv \tilde{C}$ は t に無関係な定数であるから、確率1で(67)式が成立つ。

<u>注意5.</u> (84)における時間0は任意の時間 t_0 ($t_0 \leqq t$) に置き換えても差し支えない。

2° $u(x(\tau),\tau)$, $t\leqq\tau\leqq T$, を最適制御とし、$x(\tau)$, $t\leqq\tau\leqq T$, を初期条件 $x(t)$ をもつ $u(\cdot,\cdot)$ に対応する最適過程とする。更に $x(\tau)+\delta x(\tau)$, $t\leqq\tau\leqq T$, を初期条件 $x(t)+\delta x(t)$ をもつ最適な摂動制御 $u(x(\tau)+\delta x(\tau),\tau)\equiv u(x(\tau),\tau)+\delta u(\delta x(\tau))$, $t\leqq\tau\leqq T$, に対応する最適過程とする。定義(46),(47)によると、

$$V(x(t),t) = E[C'x(T)\mid x(t)]$$

$$V(x(t)+\delta x(t),t) = E[C'(x(T)+\delta x(T))\mid x(t)+\delta x(t)] \tag{85}$$

$$\therefore\ V(x(t)+\delta x(t),t) - V(x(t),t) = E[C'\delta x(T)\mid x(t),\delta x(t)]$$

$$= E[p'(T)\delta x(T)\mid x(t),\delta x(t)] \tag{86}$$

ところで、(84)式における時間0の任意性によって、

$$E[p'(T)\delta x(T)\mid x(t),\delta x(t)] = E[p'(t)\mid x(t)]\delta x(t) + o(\delta x(t)) \quad a.e.(\mu) \tag{87}$$

$$(\|\delta x(t)\|\to 0)$$

したがって、(86)と(87)によって、

$$V(x(t)+\delta x(t),t) - V(x(t),t) = E[p'(t)\mid x(t)]\delta x(t) + o(\delta x(t)) \quad a.e.(\mu) \tag{88}$$

$$(\|\delta x(t)\|\to 0)$$

特に、$\delta x^i\neq 0$, $\delta x^j(t)=0$ $(j\neq i)$ とおくと、次の式が得られる。

$$\frac{1}{\delta x^i(t)}\left[V(x^1(t),\cdots\cdots,x^{i-1}(t),x^i(t)+\delta x^i(t),x^{i+1}(t),\cdots,x^n(t))-V(x^1(t),\cdots,x^i(t),\cdots,x^n(t))\right]$$
$$=E[p^i(t)\,|\,x(t)]+o(1)\qquad(|\delta x^i(t)|\to 0)\quad a.e.(\mu)\quad(89)$$
$$i=1,2,\cdots\cdots,n$$

それ故，$\delta x^i(t)\to 0$ なる極限操作を行うと，

$$\frac{\partial V(x(t),t)}{\partial x^i}=E[p^i(t)\,|\,x(t)]\qquad(i=1,2,\cdots\cdots,n)\quad a.e.(\mu)\quad(90)$$

が成立ち，したがって，(68) 式が証明された。

(定理4の証明終)

§6. あとがき

[I] 確率微分方程式系における最適制御過程の問題点

1) 最適制御の構成法の検討：

まず，*sub σ-field* $\Sigma^*(t)$ の検討として，どのような過去の情報をもとにして制御を行うべきか？という問題が起る。特に，いかなる場合に最適制御が現在の状態のみを観測して現在の状態の函数，あるいは汎函数として決定され得るかどうか，つまり，マルコフ性をもつ制御の中から選択され得るかどうかという問題は興味がある。このことについては，*H.J. Kushner* [10] は深く議論していなかったが，最近 *W.H. Fleming* [19] によって，$Z(\omega,t)$ が *Brown* 運動である場合には，マルコフ制御の間で最適制御が存在し得ることが実証されている。

2) 最大原理の必要性の検討：

一般的に (A1) ～ (A5) の条件よりももっとゆるい仮定の下で

最大原理の必要性が云えないだろうか？ このことについては目下検討中である。

3) 最適制御の存在性と一意性の検討：

最適解の存在性を知るためには、軌道全体の集合、および、許容制御系全体の集合が一様収束性のある位相に関してコンパクトであるかどうかを検討してみる必要があると思う。最近、H.J. Kushner[17]、および、W.H. Fleming & M. Nisio [18] によってある制限の下では、許容制御の広いクラスの中で最適制御の存在性が云えることを実証しているが、完全に解決したとは云えない。最適解の一意性に関しては、系の安定性を解析する必要があるのではなかろうかと思うが、この問題点はまだ解決されていないようである。

4) 時間Tが自由である場合、特に制止時間(stopping time)である場合の最適制御問題の解析については、[16], [17], [18], [19], [20] を参照されるとよい。

5) 拘束条件が不等式 $g^i(x(\omega,t), u(\omega,t), t) \leqq 0$, $i=1,\cdots\cdots,l$, または等式 $h^j(x(\omega,t), u(\omega,t), t) = 0$, $j=1,\cdots\cdots,m$, によって置き換えられた場合、つまり制限された状態変数をもつ場合の最適制御問題の解析については今後の問題点と云えよう。

[II] 一般に離散時間型を含めた系における最適制御過程の今後の問題点

1）最適制御の構成法の検討

2）最大原理の適用範囲の検討

3）非線型系の場合の最大原理の十分性の検討

4）最適制御の存在性と一意性の検討

以上の[I]，[II]の問題点についての詳しい議論は別の機会に報告したい。

参考文献

[1] Bellman, R.E., "Dynamic Programming", Princeton univer. press (1957)

[2] Boltyanskii, V.G., Gamkrelidze, R.V., Mishchenko, E.F., & Pontryagin, L.S., "The Mathematical Theory of Optimal Processes," Gosudarst, Moscow, 1961; English transl., Interscience, New York, (1962)

[3] Rozonoér, L.I., The L.S. Pontryagin maximum principle in the theory of optimal systems, I, II, III, Automatic and Remote Control, Vol. 20, (1960), PP. 1288～1302, PP. 1405～1421, PP. 1517～1532（英訳）

[4] Butkovskii, A.G., Optimal processes in Systems with distributed parameters, Automation and Remote Control, Vol. 22 (1961), PP. 13～21.（英訳）

[5] Butkovskii, A.G., The maximum principle for optimum systems with distributed parameters, Automation and Remote Control, Vol.22(1961), PP.1156~1169. (英訳)

[6] Egorov, A.I., On optimal control of processes in distributed objects, J. Appl. Math. Mech, Vol.27(1963), PP.1045～1058.（英訳）

[7] Egorov, Ju.V., Necessary conditions for the optimality of control in Banach spaces, Math. Sb(N.S.)64(106),(1964), PP. 79～101 (Russian); American Mathematical Society Translations Series 2, Vol.49, Ten Papers on Functional Analysis and Measure Theory, 1966, PP. 63～85.

[8] Kushner, H.J., & Schweppe, F.C., A maximum principle for stochastic control systems, J. Math. Anal. Appli. Vol. 8, (1964), PP. 287～302.

[9] Sworder, D.D., Optimal control of discrete-time stochastic systems, J. M. A. A., Vol.15, (1966), PP.253~263.

[10] Kushner, H.J., On the stochastic maximum principle: fixed time of control, J. M. A. A., Vol.11, (1965). PP.78～92.

[11] 田中洋 & 長谷川実；「確率微分方程式」, 確率論セミナー, Vol. 19, (1964)

[12] 伊藤清；「確率論」, 現代数学講座14, 岩波書店 (1953)

[13] Bellman, R., & Cooke, K., "Differential-Difference Equations", Academic Press, (1963)

[14] Dynkin, E.B., "Markov Processes", Springer, Berlin, (1965). (英訳).

[15] Florentin, J.J., Optimal control of continuous time, Markov stochastic systems, J. Elec. and Control. Vol. 10, (1961), pp. 473 ~ 488.

[16] Fleming, W.H., Some Markovian optimization problems, J. Math. Mech., Vol. 12, (1963), pp. 131 ~ 140.

[17] Kushner, H.J., On the existence of optimal stochastic controls, J. Soc. Indust. Appl. Math. Ser. A Control, Vol. 3, (1965), pp. 463 ~ 474.

[18] Fleming, W.H., & Nisio, M., On the existence of optimal stochastic controls, J. Math. Mech., Vol. 15, (1966), pp. 777 ~ 794.

[19] Fleming, W.H., Duality and 'a priori' estimates in Markovian optimization problems, J.M.A.A., Vol. 16, (1966), pp. 254 ~ 279.

[20] Kushner, H. J., On the Stochastic Maximum Principle with "Average" Constraints, J.M.A.A. Vol. 12, (1965), pp. 13 ~ 26.